Université de Tours
Faculté de Médecine de TOURS

Année universitaire 2021-2022

PASS
Vendredi 10 décembre 2021

Module 3	EPREUVE Mathématiques	Heure de début 15h15	Durée 1h30	Heure de fin 16h45

CONSIGNES A LIRE AVANT L'EPREUVE

Vérifiez que votre sujet est complet

L'épreuve comporte :

- **1 cahier 25 questions (13 pages)**
- **4 feuilles de brouillon**

IMPORTANT :

Remplissage de la feuille réponses :
lire consignes et exemple de marquage sur la feuille réponses QCM

QCS : une seule réponse exacte
QCM : plusieurs réponses exactes

Instructions

- Le sujet fait 13 pages et comporte 25 questions.
- Les questions notées QCS ont une unique bonne réponse, les questions notées QCM ont au moins deux bonnes réponses.
- Les questions sont indépendantes. En particulier, la même notation dans deux questions différentes désigne deux objets différents.

Questions

1) QCS -On cherche à déterminer l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\exp\left(2 + x - x^2\right) \geqslant 1$$

si et seulement si $x \in I$. Parmi les réponses suivantes, laquelle est correcte ?

a) $I = [0, +\infty[$.

b) $I =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.

c) $I = [-1, 2]$.

d) $I = [-2, 1]$.

e) $I =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

2) QCS -Pour x dans $\mathbb{R}$, on note

$$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x+1} \left(\frac{6}{5}\right)^{1-x}.$$

Quelle expression alternative est valable pour tout x dans $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \dfrac{9}{10}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{x}.$

b) $f(x) = \dfrac{9}{10}\left(\dfrac{15}{32}\right)^{x}.$

c) $f(x) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^{x+2}.$

d) $f(x) = \left(\dfrac{15}{32}\right)^{x}.$

e) $f(x) = \left(\dfrac{81}{100}\right)^{x+1}.$

3) QCS -Soit P et Q les polynômes

$$P(X) = 1 - X^2 + X^3, \quad \text{et} \quad Q(X) = 1 - X^2.$$

On calcule le polynôme $R = P \circ Q$. Parmi les propositions suivantes, quel est le résultat correct ?

a) $R(X) = 3 - 5X^2 + 4X^4 - X^6.$

b) $R(X) = 1 + 5X^2 + 2X^4 + X^6.$

c) $R(X) = 1 - X^2 + 2X^4 - X^6.$

d) $R(X) = 1 - 5X^2 + 4X^4 - X^6.$

e) $R(X) = 1 - X^2 + 4X^4 - X^6.$

4) QCS -Soit A et B les polynômes

$$A(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 - 2X + 3 \text{ et } B(X) = X^2 + 2X + 2.$$

On note R le reste de la division euclidienne de A par B. Parmi les propositions suivantes, quel est le résultat correct ?

a) $R(X) = X^2 + 4X + 3.$

b) $R(X) = -6X + 1.$

c) $R(X) = -6X - 1.$

d) $R(X) = 2X + 1.$

e) $R(X) = 2X - 1.$

5) QCS -On cherche deux nombres complexes α et β tels que $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = 4$. De quelle équation du second degré, α et β sont-ils solutions ?

a) $X^2 - X - 4 = 0.$

b) $X^2 - 4X + 1 = 0.$

c) $X^2 + 4X - 1 = 0.$

d) $X^2 - X - 1 = 0.$

e) $X^2 - X + 4 = 0.$

6) QCM -On donne le nombre complexe $z = -1 + 2i$. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\dfrac{1}{z - i} + (\overline{z})^2 = -\dfrac{7}{2} + \dfrac{7i}{2}$.

b) $\dfrac{1}{z - i} + (\overline{z})^2 = 4 + 3i$.

c) $\dfrac{1}{z - i} + (\overline{z})^2 = 2 + 3i$.

d) $|z+1| = 2$.

e) $|z+1| = 3$.

7) QCM -Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $M(\theta)$ le point d'affixe $e^{i\theta}$ et O l'origine du repère orthonormé canonique. Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Les points $M(\frac{2\pi}{3})$ et $M(-\frac{\pi}{6})$ sont diamétralement opposés.

b) Le triangle formé par les points O, $M(\frac{2\pi}{3})$ et $M(\frac{\pi}{6})$ est rectangle en O.

c) Les points $M(\frac{11\pi}{6})$ et $M(-\frac{\pi}{6})$ sont confondus.

d) Les points $M(\frac{4\pi}{3})$ et $M(\frac{\pi}{6})$ sont diamétralement opposés.

e) Les points $M(\frac{4\pi}{3})$ et $M(\frac{2\pi}{3})$ sont confondus.

8) QCM -Soit a et b deux nombres réels. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies pour toutes les valeurs de a et b ?

a) $\sin(a+b) = \mathrm{Re}\, e^{i(a+b)}$.

b) $\sin(a+b) = \mathrm{Im}\, e^{i(a+b)}$.

c) $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$.

d) $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

e) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

9) QCS -Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-2}-n}.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = -1.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = -\frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = -1.$

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = -\frac{1}{2}.$

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$

10) QCM -Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{n+e^n+1}.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}.$

b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

d) $\sup\{u_n, \quad n \geqslant 1\} = \dfrac{1}{2}.$

e) $\inf\{u_n, \quad n \geqslant 1\} = 0.$

11) QCS - On note $\mathcal{D}_f$ le domaine maximal de définition de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{1-x}\right).$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup]1, 2]$.

b) $\mathcal{D}_f =]-2, 1[\cup]2, +\infty[$.

c) $\mathcal{D}_f =]-2, 2[$.

d) $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]1, 2[$.

e) $\mathcal{D}_f =]-2, 1[$.

12) QCM - On définit les fonctions f, g, et h sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = 3x+1, \quad h(x) = x^2-1.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g \circ h(x) = 9x^2 + 6x$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h \circ f(x) = e^{2x} - 1$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h \circ g(x) = 9x^2$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = e^{3x+1}$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g \circ f(x) = 3e^{x+1}$.

13) QCS -Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(2x+1)^2}{x(x+\sqrt{x})}.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4.$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

14) QCM -Soit u une fonction définie et décroissante sur $]0, 1[$ et telle que

$$\lim_{x \to 0} u(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1} u(x) = 0.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(X) = Xe^{-X}$. On définit la fonction $f = F \circ u$ sur $]0, 1[$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty.$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0.$

e) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$

15) QCM -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{x^2 - 2x} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \\ 3 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ? On ne s'intéresse pas au domaine maximal de continuité.

a) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

b) La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$.

c) La fonction f est continue sur $]0, 2[$.

d) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.

e) La fonction f est continue sur $]-2, 2[$.

16) QCS -Soit F une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = F(x^3 + 1)$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]0, 2[$.

b) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $]1, 2[$.

c) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $[1, 2]$.

d) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $[1, 2[$.

e) L'image de $\mathbb{R}$ par f est $[0, 2]$.

17) QCS -Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (\sin x)e^{x^2+1}.$$

Parmi les expressions suivantes, laquelle donne la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = (\cos x)e^{x^2+1}.$

b) $f(x) = (-2x\cos x)e^{x^2+1}.$

c) $f(x) = (\cos x + \sin x)\, e^{x^2+1}.$

d) $f(x) = (\cos x + 2x\sin x)\, e^{x^2+1}.$

e) $f(x) = (-\cos x + 2x\sin x)\, e^{x^2+1}.$

18) QCS -Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(u^2(x) + 1\right).$$

Parmi les expressions suivantes, laquelle donne la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)+1}.$

b) $f(x) = \dfrac{2u'(x)u(x)}{u(x)+1}.$

c) $f(x) = \dfrac{1}{u^2(x)+1}.$

d) $f(x) = -2u'(x)\left(u^2(x)+1\right).$

e) $f(x) = \dfrac{2u'(x)u(x)}{u^2(x)+1}.$

19) QCS -On calcule l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\, dx.$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $I = \frac{2}{3}$.

b) $I = \frac{4}{3}$.

c) $I = 2$.

d) $I = 3$.

e) $I = 2\sqrt{2}$.

20) QCS -On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

et on calcule le produit matriciel $AB\,{}^tC$. Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $AB\,{}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $AB\,{}^tC = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $AB\,{}^tC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $AB\,{}^tC = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $AB\,{}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21) QCS -Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son repère orthonormé canonique, on note S l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{cases}$$

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a) Le système donné n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

b) L'ensemble S est une droite.

c) L'ensemble S contient un unique point.

d) L'ensemble S est un plan.

e) L'ensemble S est tout l'espace : $S = \mathbb{R}^3$.

22) QCS -Soit f une fonction dérivable qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note g la bijection réciproque de f (c'est-à-dire $g = f^{-1}$). On suppose de plus que f et f' prennent les valeurs suivantes

$$f(-1) = 2 \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = 1$$
$$f'(-1) = \frac{1}{3} \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad f'(2) = 2$$

Parmi les égalités suivantes, laquelle est correcte ?

a) $g'(2) = 2$.

b) $g'(2) = 3$.

c) $g'(2) = -3$.

d) $g'(2) = \frac{1}{2}$.

e) $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

23) QCM -Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\text{Arcsin}\big((\sin(\pi))\big) = \pi.$

b) $\text{Arccos}\big(\cos(\pi)\big) = -1.$

c) $\text{Arcsin}\big(\sin(\frac{6\pi}{5})\big) = -\frac{\pi}{5}.$

d) $\text{Arccos}\big(\cos(\frac{6\pi}{5})\big) = \frac{4\pi}{5}.$

e) $\text{Arctan}\big(\tan(\frac{4\pi}{5})\big) = \frac{4\pi}{5}.$

24) QCM -Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Le calcul de g' donne le tableau de signes suivant (dans lequel $-$ signifie strictement négatif et $+$ strictement positif) :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On donne de plus les limites et valeurs suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty, \quad g(-1) = -\frac{1}{e}, \quad g(0) = e, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) L'équation $g(x) = 0$ a exactement 1 solution réelle.

b) L'équation $g(x) = 0$ a exactement 2 solutions réelles.

c) L'équation $g(x) = 1$ a exactement 3 solutions réelles.

d) L'équation $g(x) = 1$ a exactement 2 solutions réelles.

e) L'équation $g(x) = 1$ a exactement 1 solution réelle.

25) QCM -Soit f une fonction continue sur $[-1,2]$ dont le tableau de variations est donné par :

x	-1		0		1		2
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\ln(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$\ln 2$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) $\sup\{f(x),\ \ x \in [-1,1]\} = 1.$

b) $\sup\{f(x),\ \ x \in [-1,2]\} = \ln 2.$

c) $\inf\{f(x),\ \ x \in [-1,2]\} = -\ln 2.$

d) $\sup\{f(x),\ \ x \in [-1,2]\} = 1.$

e) $\inf\{f(x),\ \ x \in [0,2]\} = -\ln 2.$

FIN DE L'ÉNONCÉ
